

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۲

آمار و احتمال (رشته ریاضی و فیزیک)



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

گروه
ریاضی
 مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی
 سید ایمان مصلح
 ۰۹۳۶۳۳۳۳۳۳۳۳
حسابان و
ریاضی پایه
 مسئول درس: علیرضا فاطمی
 دستیار: مهدی پوررضایی

حسین شفیعزاده ● علیرضا فاطمی ● سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

 مسئول درس: محمد تقی پور
 دستیار: هادی کاظم نژاد

 سیدمحسن میراسلامی ● امیدرضا پورحسینی ● هادی کاظم نژاد
 سعید اکبرزاده
ریاضیات
گستره
 مسئول درس: حسین اسدزاده
 دستیار: مریم حسینی

سعید اکبرزاده ● سوگند روشنی ● پرمیدا هادی پور

ریاضی
تجربی
 مسئول درس: امیرحسین شریفیان
 دستیار: امین کبیری

ایمان اردستانی ● محمد خان گلدی

ریاضی
انسانی
 مسئول درس: عباس سعیدی
 دستیار: امیرحسین حریری

 امیدرضا پورحسینی ● محمد منتظران ● حسین خواجهوند
 حسین افسری ● مجید یوسفزاده
زیست
شناسی

مسئول درس: علی جوهری

امیر کبیری راد ● منصوره رئیس دانا ● بتول خواجه پور

فیزیک

مسئول درس: مهدی نیکوگفتار

 احمد رضوانی ● مهرناز طلوع شمس ● مریم حیدری
 یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

 شهرام شاه پرویزی ● محمد وحیدی ● سبحان دقیق
 محمدعلی توسلی فر
زمین
شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

فرزانه رجایی ● حسن علی محمدی

انسان و
محیط زیست

مسئول درس: شکبیا کریمی

محبوبه کاظمی

سلامت و
بهداشت

مسئول درس: علیرضا رضایی نیا

علیرضا رضایی نیا

گروه
علوم
 مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی
 سید ایمان مصلح
 ۰۹۳۶۳۳۳۳۳۳۳

طراحان

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

طراحان

گروه عمومی
علی اکبر آخوندی
۱۳۹۹گروه انسانی
علی اکبر آخوندی
۱۳۹۹ادبیات
فارسیمسئولین درس:
عماد فیض آبادی
محسن ابراهیم تهرانیابوالفضل غلامی • افشین محی الدین • احسان محسنی
عماد فیض آبادی • محسن ابراهیم تهرانیدین و
زندگیمسئولین درس:
علی اکبر آخوندی
زهرا محمدیمحمد کریمی • علیرضا دلشاد • علی اکبر آخوندی
زهرا محمدی • محبوبه ابتهسامزبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری • سعید ابراهیمی • امین امیدوار

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

فاطمه اکران • گلاویژ جلالی • مینا پزنگ
مهراوه مجتهدجامعه
شناسیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریفروغ تیموریان • آریتا بیدقی • علیرضا مختاری
الهام میرزایی • آزاده میرزایی • الهام رضاییروان
شناسیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مهدی پارچه باف

زبان
عربیمسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزهاسرافیل قربان پور • محسن احدی • کیارش پورمهدی
امینه کارآمد • زهرا فرزانه

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسبمهسا اصغری • سامان بهری • زهره قموشی
الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرروز یحیی • مهسا اصغری • الهه ریاحی نسب

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری • حسین صادقی • سیاوش خداشناس

اقتصاد

مسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

آیدانا رستمی

هویت
اجتماعیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

رضا کیانپور

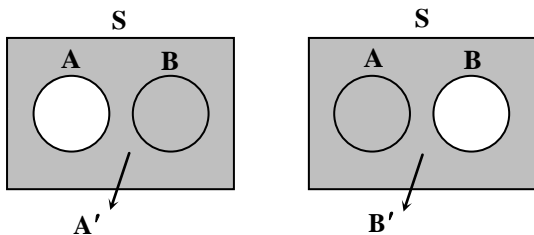




۱-

الف) نادرست

مطابق شکل زیر دو پیشامد A و B ناسازگارند ولی متمم هایشان یعنی A' و B' سازگارند:



ب) نادرست

نکته: برای مجموعه‌های A, B, C و D داریم:

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

برای مجموعه‌های A و B داریم:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$$

طبق نکته چون $A \cap B \neq \emptyset$ ، پس:

$$(A \cap B) \times (A \cap B) = (A \cap B)^2 \neq \emptyset$$

پ) درست

می‌دانیم گزاره شرطی زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، پس:

$$p \Rightarrow \sim q \equiv F \Rightarrow \begin{cases} p \equiv T \\ \sim q \equiv F \Rightarrow q = T \end{cases} \Rightarrow q \wedge p \equiv T \wedge T \equiv T$$

ت) درست

$$P(A' | B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A')}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A | B)$$

۲-

الف) مجموعه توانی (ب) برآمد (پ) $\frac{1}{3}$ (ت) U

$$A \cup (A \cap B)' = A \cup (A' \cup B') = (A \cup A') \cup B = U \cup B = U$$

۳-

می‌دانیم عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $\sim p \Rightarrow \sim q$ است، پس داریم:

$$\sim q \Rightarrow \sim p \equiv F \Rightarrow \begin{cases} \sim q \equiv T \Rightarrow q \equiv F \\ \sim p \equiv F \Rightarrow p \equiv T \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \equiv (T \wedge T) \Leftrightarrow T \equiv T \Leftrightarrow T \equiv T$$

۴-

نکته: ترکیب عطفی، فصلی و شرطی دو گزاره به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د

طبق نکته با تشکیل جدول داریم:

p	q	$q \Rightarrow p$	$p \vee q$	$(q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	ن
ن	ن	د	ن	ن



-۵

نکته: برای دو مجموعه دلخواه A و B داریم:

$$A - B = A \cap B'$$

نکته (خاصیت جابه جایی):

الف) $A \cap B = B \cap A$

ب) $A \cup B = B \cup A$

نکته: تساوی های زیر که به قوانین دمورگان معروف اند برای هر دو مجموعه دلخواه A و B از مجموعه مرجع U برقرارند:

الف) $(A \cup B)' = (A' \cap B')$

ب) $(A \cap B)' = (A' \cup B')$

نکته (خاصیت توزیع پذیری):

الف) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

نکته: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه های مرجع و تهی، تساوی های زیر برقرارند:

۱) $A \cup A' = U$

۲) $A \cap A' = \emptyset$

۳) $A \cup U = U$

۴) $A \cap U = A$

طبق نکات داریم:

$$(A \cup B) - (B - A) = (A \cup B) - (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A' \cap B)' = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$$

-۶

نکته (عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه): اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \times B$ مجموعه ای است که به صورت زیر تعریف می شود:

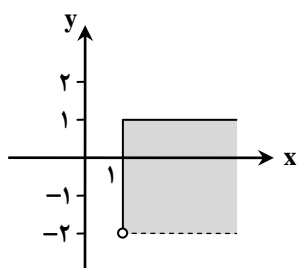
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

در این تعریف توجه دارید که در هر (x, y) متعلق به $A \times B$ ، همواره مؤلفه یا مختص اول، یعنی x باید از مجموعه A و متناظراً مؤلفه دوم، یعنی y باید از مجموعه B باشد.

طبق نکته داریم:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in [1, +\infty) \wedge y \in (-2, 1)\}$$

بنابراین نمودار $A \times B$ به صورت زیر است:



-۷

(الف)

نکته (دو مجموعه مساوی): فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A ، عضو B و هر عضو B عضو A باشد، یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، در این صورت A با B مساوی است و می نویسیم: $A = B$ ، به عبارت دیگر می توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت:

$$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

نکته (عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه): اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، $A \times B$ مجموعه ای است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

در این تعریف توجه دارید که در هر (x, y) متعلق به $A \times B$ ، همواره مؤلفه یا مختص اول، یعنی x باید از مجموعه A و متناظراً مؤلفه دوم، یعنی y باید از مجموعه B باشد.

با توجه به نکات و به روش عضوگیری و فرض $A \times B = B \times A$ داریم:

$$\forall x \in A, \forall y \in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x, y) \in A \times B$$

$$\xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in B \times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in B \wedge y \in A \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$$



(ب)

نکته: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A ، عضوی از B باشد، در این صورت A را زیر مجموعه B نامیده و می‌نویسند $A \subseteq B$. اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$\forall x ; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$$

طبق نکته برای اینکه ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که:

بنابراین داریم:

$$\forall x ; (x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x ; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

-۸

نکته: اگر $A \subseteq B$ به طوری که $A \neq B$ ، آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سره B نامیده می‌شود.

نکته: فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

فرض کنیم این مجموعه n عضو داشته باشد، طبق اطلاعات سؤال داریم:

$$2^n - 2^{n-2} = 448 \Rightarrow 2^n - 2^n \times 2^{-2} = 448 \Rightarrow 2^n \times (1 - \frac{1}{4}) = 448 \Rightarrow 2^n \times \frac{3}{4} = 448$$

$$\Rightarrow 2^n = 448 \times \frac{4}{3} = 512 = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

بنابراین این مجموعه ۹ عضو دارد و تعداد زیرمجموعه‌های محض این مجموعه برابر است با:

$$2^n - 1 = 2^9 - 1 = 512 - 1 = 511$$

-۹

نکته: در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

نکته: در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$.

نکته: عبارت‌هایی مانند «هر»، «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی مقادیر» به سور معروف‌اند. گزاره‌ها یا گزاره‌نماهایی که شامل عبارت‌های سوری باشند به گزاره‌های سوری معروف‌اند. در هر گزاره سوری که شامل متغیر باشد، دامنه متغیر باید مشخص باشد. برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای جمیع مقادیر» از نماد \forall و به‌جای «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

ابتدا اعضای مجموعه A را که دامنه متغیر می‌باشد مشخص می‌کنیم:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

اکنون مجموعه جواب هر گزاره را مشخص می‌کنیم:

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \checkmark \text{ جزو دامنه است} \\ x = -4 & \times \end{cases}$$

پس گزاره «الف» درست است.

$$x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad \times$$

پس گزاره «ب» نادرست است؛ زیرا رابطه $x^2 + 1 > 2x$ به‌ازای $x = 1 \in A$ برقرار نمی‌باشد.

-۱۰

نکته (قوانین جذب یا همپوشانی): اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع U باشند، داریم:

الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = A$

نکته (خاصیت توزیع پذیری):

الف) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



نکته: تساوی های زیر که به قوانین دمورگان معروف اند برای هر دو مجموعه دلخواه A و B از مجموعه مرجع U برقرارند:

الف) $(A \cup B)' = (A' \cap B')$

ب) $(A \cap B)' = (A' \cup B')$

با استفاده از نکات داریم:

راه حل اول:

$$B = B \cup (A \cap B) = B \cup (A \cap C) = (B \cup A) \cap (B \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C) = C \cup (A \cap B) = C \cup (A \cap C) = C$$

راه حل دوم:

$$B = B \cap (A \cup B) = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) = (C \cap A) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B) = C \cap (A \cup C) = C$$

راه حل سوم:

$$C = C \cup (A \cap C) = C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) = (B \cup A) \cap (C \cup B) = B \cup (A \cap C) = B \cup (A \cap B) = B$$

راه حل چهارم:

$$C = C \cap (A \cup C) = C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = (B \cap A) \cup (C \cap B) = B \cap (A \cup C) = B \cap (A \cup B) = B$$

-۱۱

الف) فردا باران می بارد و علی به مدرسه می رود.

ب) $\forall x \in P; x = 2k+1 \wedge x \neq 4k (k \in Z)$

ارزش گزاره فوق نادرست است؛ زیرا مثال نقض $x = 2$ دارد.

-۱۲

راه حل اول:

پرتاب دو تاس در کل ۳۶ حالت دارد که در ۱۸ حالت مجموع دو عدد ظاهر شده زوج و در ۱۸ حالت دیگر فرد است، پس فضای نمونه جدید کاهش یافته دارای $n(S) = ۱۸$ عضو است، همچنین داریم:

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

در نتیجه احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

راه حل دوم:

اگر پیشامد یکسان بودن دو تاس را A و پیشامد زوج بودن مجموع دو تاس را B در نظر بگیریم، سؤال احتمال پیشامد A به شرط B را از ما خواسته، پس:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\text{مجموع دو تاس زوج و دو تاس یکسان})}{P(\text{مجموع دو تاس زوج})} = \frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{1}{3}$$

-۱۳

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

نکته: در صورتی که B پیشامدی باشد که $P(B) > 0$ ، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» «که آن را $P(A|B)$ می خوانیم) به شکل زیر تعریف می شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ابتدا با استفاده از اطلاعات سؤال، $P(A \cap B)$ را محاسبه می کنیم:

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = \frac{6}{7} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{7}$$

اکنون داریم:

الف) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{7} = \frac{14-3}{21} = \frac{11}{21}$

ب) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{14}$



نکته: در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k) \quad (۳) \quad P(S) = 1 \quad (۲) \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (۱)$$

راه حل اول:

فرض کنیم $P(c) = x$ باشد، طبق اطلاعات سؤال داریم:

$$P(a) = 4P(c) \Rightarrow P(a) = 4 \times x = 4x$$

$$P(b) = \frac{1}{2}P(a) \Rightarrow P(b) = \frac{1}{2} \times 4x = 2x$$

$$P(d) = 2P(a) \Rightarrow P(d) = 2 \times 4x = 8x$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow 4x + 2x + x + 8x = 1 \Rightarrow 15x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{15}$$

بنابراین:

$$P(c) = x = \frac{1}{15}$$

راه حل دوم:

با فرض $P(a) = x$ داریم:

$$P(a) = 4P(c) \Rightarrow P(c) = \frac{1}{4}P(a) = \frac{1}{4}x$$

$$P(a) = \frac{1}{2}P(d) \Rightarrow P(d) = 2P(a) = 2x$$

$$P(b) = \frac{1}{2}P(a) = \frac{1}{2}x$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 2x = 1 \Rightarrow \frac{15}{4}x = 1 \Rightarrow x = \frac{4}{15}$$

بنابراین:

$$P(c) = \frac{1}{4}x = \frac{1}{4} \times \frac{4}{15} = \frac{1}{15}$$

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

نکته: تعداد مضارب عدد طبیعی k در مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ برابر است با: $\left[\frac{n}{k} \right]$

پیشامدها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

A : پیشامد بخش پذیر بودن بر ۶

B : پیشامد بخش پذیر بودن بر ۸

$A \cap B$: پیشامد بخش پذیر بودن بر ۲۴

خواسته سؤال برابر است با:

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

احتمال هر پیشامد برابر است با:

$$P(A) = \frac{\left[\frac{100}{6} \right]}{100} = \frac{16}{100}$$

$$P(B) = \frac{\left[\frac{100}{8} \right]}{100} = \frac{12}{100}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{100}{24} \right]}{100} = \frac{4}{100}$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A' \cap B') = 1 - \frac{16}{100} - \frac{12}{100} + \frac{4}{100} = \frac{76}{100}$$